Matemática 1

Material Complementario No. 4

DERIVADA DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

I. Definición de derivada de una función en un valor. Interpretación geométrica.

1. Para $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, hallar:

   (i) $f'(0)$ (ii) $f'(-2)$ (iii) $f'(x_0)$ (iv) Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de abscisa x = -2.

2. Para $f(x)=cos(x)$, hallar:

   (i) $f'(0)$ (ii) $f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (iii) $f'(x_0)$ (iv) Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de abscisa $-\dfrac{\pi}{2}$

3. Para $f(x)=tan(2x)$
   a) Hallar el dominio de f.
   b) Hallar (i) $f'(0)$ (ii) $f'\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ (iii) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
   c) ¿Existe $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$?
   d) Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de abscisa $-\dfrac{\pi}{2}$

4. Dada la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ;\ si\ x\le 1 \\ 2x & ;\ si\ x>1 \end{cases}$
   a) ¿Es f continua en x = 1?
   b) Calcular $f'_+(1)$ y $f'_-(1)$. c) ¿Es la función f diferenciable en x = 1?
   c) Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de abscisa x = 1?

5. Dada la función definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & ;\ si\ x<2 \\ (x-2)^2 & ;\ si\ x\ge 2 \end{cases}$
   a) ¿Es f continua en x = 2?
   b) Calcular $f'_+(2)$ y $f'_-(2)$. ¿Es la función f diferenciable en x = 2?
   c) ¿Existe recta tangente a la gráfica de f en su punto de abscisa x = 2?

6. Para $f(x)=\begin{cases} xsen\left(\dfrac{1}{x}\right) & ;\ si\ \ x\ne 0 \\ 0 & ;\ si\ \ x=0 \end{cases}$, analizar si existe $f'(0)$

7. Para $f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & ; si\ x \neq 0 \\ 0 & ; si\ x = 0 \end{cases}$, analizar si existe $f'(0)$

8. Sea f una función con dominio ℝ, tal que $|f(x)| \leq x^2 \ , \forall x \in R$
Demostrar que f es derivable en x = 0 y hallar $f'(0)$

9. Sea f una función diferenciable en x = x_0 (es decir, existe $f'(x_0)$), verificar las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

10. Interpretar cada uno de los siguientes límites como la derivada de una función *f* en un valor x_0, precisando la función *f* y x_0:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{ln(4+h) - ln(4)}{h}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2^{3+h} - 8}{h}$

d) $\lim\limits_{x \to 5\pi} \frac{cos(x) + 1}{x - 5\pi}$

f) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sen^2(3\pi + 3h)}{h}$

11. Sea *f* una función diferenciable en todo x ∈ ℝ y sea *g* la función definida por $g(x) = f(x + a)$ para cierta constante *a*. Demostrar que $g'(x_0) = f'(x_0 + a)$ para todo x_0 ∈ ℝ

12. Si *f* es una función diferenciable en x_0 y *b* es una constante, calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + tan(bh)) - f(x_0)}{h}$

II. Diferenciabilidad y continuidad en un valor

13. Sea *g* una función continua en x_0 , y sea *f* una función definida por: $f(x) = (x - x_0)g(x)$. Hallar *f '*(x_o)

14. Dada *f* definida por: $f(x)=\begin{cases} ax^2 + b & ; si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & ; si\ x > 1 \end{cases}$, hallar los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en x = 1. Graficar *f* con los valores de *a* y *b* hallados.

15. Dada *f* definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2 + bx + 6 & ; si\ x \leq 2 \\ ax + b & ; si\ x > 2 \end{cases}$, hallar los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en x = 2. Graficar *f* con los valores de *a* y *b* hallados.

16. Dada $f(x)=\begin{cases} x^3 + 1 & ; si\ x < 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{b}{x+1} & ; si\ x \geq 1 \end{cases}$, hallar los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en x = 1.

III. Reglas de derivación

17. Dada la función f definida por $f(x) = -x^2 + 4x + 3$;

    a) Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P = (1, f(1))$
    b) Hallar las coordenadas de los puntos de la gráfica de f (si existen) donde la recta tangente tiene pendiente m = 2.
    c) Hallar ecuaciones las rectas tangentes a la gráfica de f, trazadas desde el punto $Q = \left(\frac{3}{2}, 9\right)$
    d) ¿Existe recta tangente a la gráfica de f que pase por el punto $R = (2,2)$

18. Sea f derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(2) = 3$, y sea g definida por $g(x) = x^3 f(x)$. Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P = (2,3)$ pasa por $Q = (0,6)$, hallar $g'(2)$

19. Sea f definida por: $f(x) = \dfrac{a + bx}{1 + x}$, hallar los valores de las constantes a y b si $f(0) = f'(0) = 1$

20. En cada uno de los siguientes casos, hallar la derivada de la función dada y simplificar. Verificar las respuestas dadas. Indicar el dominio de las funciones f y f'.

    a) $g(t) = \dfrac{4}{3}\pi t^{30}$ **Rpta:** $g'(t) = 40\pi t^{29}$

    b) $f(x) = 12x - x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ **Rpta:** $f'(x) = -2x + \dfrac{3}{2x^{3/2}} + 12$

    c) $f(x) = (x+1)(3x^2 - 4)$ **Rpta:** $f'(x) = 9x^2 + 6x - 4$

    d) $g(y) = \dfrac{y^2 - 2y}{y^2 + 5y}$ **Rpta:** $g'(y) = \dfrac{7}{(y+5)^2}$

    e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

    f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{4(x+1)}{(1-x)^3}$

    g) $h(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$ **Rpta:** $h'(x) = \dfrac{1}{x^2(\cos x)^2} - \dfrac{2\tan x}{x^3}$

21. En cada uno de los siguientes casos hallar la función $f'(x)$ indicando su dominio:

    a) $f(x) = |x|$

    b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$

    c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & , \text{ si } x < -2 \\ 1 - 4x - x^2 & , \text{ si } x \geq -2 \end{cases}$

    d) $f(x) = \begin{cases} sen^2(x) & ; \text{ si } -\pi < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 2 & ; \text{ si } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

IV. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena.

22. Sean *f* y *g* funciones derivables tales que *g(1)=2 y f(1)=3*. Si $m_1 = 5$ y $m_2 = 7$ son las pendientes de las rectas tangentes L_1 y L_2 a las gráficas de *g* en el punto (1,2) y de *f* en el punto (2,3) respectivamente; hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *(fog)* en el punto de abscisa 1.

23. Sea f una función derivable en ℝ tal que $f(2)=3$. Si la recta tangente a la gráfica de f en el punto (2,3) pasa por (0,6) calcular:
    a) $g'(2)$; si $g(x)=x^3 f(x)$
    b) $h'(0)$; si $h(x)=\sqrt{x^2+1}\, f(x^2+x+2)$

24. En cada uno de los siguientes casos, hallar la derivada de la función dada y simplificar. Verificar las respuestas dadas. Indicar el dominio de las funciones *f* y *f '*.

    a) $g(x)=(senx)^3+sen\left(x^3\right)$ **Rpta:** $g'(x)=3x^2\cos(x^3)+3(sen\,x)^2(\cos x)$

    b) $h(w)=\cos\sqrt{w^2+1}$ **Rpta:** $h'(w)=-\dfrac{wsen\sqrt{w^2+1}}{\sqrt{w^2+1}}$

    c) $f(u)=\sqrt{\cos(2u)}$ **Rpta:** $f'(u)=-\dfrac{sen(2u)}{\sqrt{\cos(2u)}}$

    d) $f(x)=(x+1)\cos x-(1-x)senx$ **Rpta:** $f'(x)=x(\cos x-senx)$

25. Sean f y g dos funciones derivables en ℝ, tales que g(x) = f '(x) y f(x) = g '(x). Si se define la función h por $h(x)=[g(x)]^2-[f(x)]^2$, calcular $h'(x)$

26. Sea f una función tal que $f(x^3)=\sqrt[3]{x^2}$, hallar $f'(x^3)$

27. Si f es una función diferenciable (derivable), tal que *f(0) = 0* y *f '(0) = 2*, encontrar $h'(0)$ si $h(x)=f(f(f(f(x))))$

28. Si f es una función derivable y su derivada verifica que $f'(x)=2x^2+3$, hallar $g'(x)$ si $g(x)=f(x^3-1)$

29. Para *f* definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & ;\ si\ x\neq 0 \\ 0 & ;\ si\ x=0 \end{cases}$
    a) Hallar la función $f'(x)$
    b) ¿Es f continua en x = 0?
    c) ¿Se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)$?
    d) ¿Es *f '* una función continua en x = 0?

30. Sea *f* una función diferenciable en ℝ, demostrar que:

    a) Si *f* es una función par, entonces *f '* es una función impar.
    b) Si *f* es una función impar, entonces *f '* es una función par.

V. Derivada de la función inversa. Derivada de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas.

31. Dada *f* definida por $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 1;\ x \in \mathbb{R}$
   a) Verificar que *f* es creciente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto tiene función inversa f^{-1}
   b) Si (1;3) pertenece a la gráfica de *f*, hallar $\left(f^{-1}\right)'(3)$
   c) Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ en el punto (-1 ; 0)

32. Dada *f* definida por $f(x) = e^{x^2+1};\ x \le 0$
   a) Verificar que f es decreciente en $x \le 0$ y por lo tanto tiene función inversa f^{-1}
   b) Hallar $\left(f^{-1}\right)'(e)$
   c) Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ en el punto $\left(e^5; -2\right)$

33. Calcular los siguientes límites (si existen):

   a) $\displaystyle \lim_{x \to 1/2} \frac{sen^{-1}(x) - \pi/6}{x - 1/2}$

   b) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$

   c) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{2^{3+h} - 8}{h}$

   d) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{ln(4+h) - ln(4)}{h}$

34. Hallar las derivadas de las siguientes funciones (simplificar y verificar las respuestas dadas). Hallar también el dominio de las funciones *f* y *f '*

   a) $f(x) = \dfrac{1}{4} ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$ **Rpta:** $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}$

   b) $f(x) = 2\sqrt{x}\, ln(x) - 4\sqrt{x}$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}}$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{2a^3} ln\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right) - \dfrac{1}{a^2 x}$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2(a^2 - x^2)}$

   d) $f(x) = \sqrt{1-x} - ln(1 + \sqrt{1-x})$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{-1}{2(1+\sqrt{1-x})}$

   e) $k(x) = e^{-3x} sen(2x)$ **Rpta:** $k(x) = e^{-3x}[2cos(2x) - 3sen(2x)]$

   f) $g(x) = ln\left(\dfrac{2x^2 - 5x}{4 - 3x}\right)^3$ **Rpta:** $g'(x) = \dfrac{6(3x^2 - 8x + 10)}{x(2x-5)(3x-4)}$

   g) $f(x) = ln\left[tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1) tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}$

   h) $f(x) = x(ln x)^2 - 2x(ln x) + 2x$ **Rpta:** $f'(x) = (ln x)^2$

   i) $f(x) = \sqrt{8x - 3x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{3}} cos^{-1}\left(1 - \dfrac{3}{4}x\right)$ **Rpta:** $f'(x) = \dfrac{8 - 3x}{\sqrt{8x - 3x^2}}$

   j) $f(x) = 4sen^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\sqrt{4 - x^2}$ **Rpta:** $f'(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$

VI. Derivación implícita.

35. En cada caso, suponiendo que cada ecuación define implícitamente una función $y = f(x)$ derivable, calcular $f'(x)$ (que también se denota: $y' ; \frac{dy}{dx} ; D_x y$)

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = x$ **Rpta:** $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y}(2\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}}$

b) $x^3 y^2 + 3xy = 0$ **Rpta:** $y' = \frac{-3x^2 y^2 - 3y}{2x^3 y + 3x}$

c) $16x^4 + y^4 = 32$ **Rpta:** $y' = \frac{-16x^3}{y^3}$

d) $x^2 y^3 = 9y$ **Rpta:** $y' = \frac{2xy^3}{9 - 9x^2 y^2}$

e) $x(seny) + y(\cos x) = 1$ **Rpta:** $y' = \frac{y\,senx - seny}{cos\,x + x\,cos\,y}$

36. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 y^2 + 3xy = 0$ en el punto de abscisa x = -1 y ordenada negativa en dicha curva..

37. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto (1 , 2).

38. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 y^3 = 9y$ en el punto (1 , -3)

39. Sea *y* = *f(x)* definida implícitamente por la ecuación: $y^2 \cos x - x \tan^{-1}(y) = sen(x + y)$; hallar $f'(x)$

40. Sea y = f(x) una función definida implícitamente por la ecuación:

$$e^{(\ln x)(\ln y)} - sen^{-1}(x^2 - y) = tan\left(\frac{\pi}{4} + y - 1\right)$$

cerca del punto $A = (x_0 ; 1)$. Hallar:

a) El valor de x_0.
b) Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto A.

41. Dada la curva $\mathcal{C}$ definida por la ecuación: $4x^2 - xy + y^2 = 24$

a) Hallar una ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto (-2 ; -4)
b) Hallar las coordenadas de los puntos de $\mathcal{C}$ en que la recta tangente tiene pendiente -2.
c) Hallar ecuaciones de las rectas tangentes a $\mathcal{C}$, trazadas desde el punto (4 ; 0)

42. Dada la curva $\mathcal{C}$ definida por la ecuación $y^4 = 4x^4 + 6xy$, hallar el área del triángulo que forma el eje Y con la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto (1 ; 2) y con la recta normal a C en dicho punto..

43. Dada la curva $\mathcal{C}$: $x\sqrt{y + 1} = y\sqrt{x + 1}$, hallar ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a $\mathcal{C}$ en su punto de abscisa x = 3.

VII. Derivadas de orden superior

44. Hallar una fórmula general para la n-ésina derivada de f: $f^{(n)}(x)$ en cada caso:

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ e) $f(x)=sen(2x)$

b) $f(x)=\frac{3}{2x-1}$ d) $f(x)=ln(2x-3)$ f) $f(x)=sen^2(x)$

45. Si y = f(x) está definida implícitamente por la ecuación $x^4+y^4=16$, verificar que: $y''=\frac{-3x^2y+3x^3}{y^4}$

46. Si $x^5+y^5=5xy$, hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$

47. Suponiendo que la ecuación $3+xy^2+ln\,y=(x+1)^2$ define una función y = f(x), hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto (1 ; 1).

48. Sea f una función dos veces derivable que cumple lo siguiente: $f(x)\neq 0$ para todo x $\in \mathbb{R}$; $f(1)=2$; $f'(1)=3$; $f''(1)=4$. Si $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, calcular $E=\frac{g(1)}{g'(1)+g''(1)}$

VIII. La derivada interpretada como razón de cambio variacional

49. En la función definida por A(x) = x^2 , A(x) representa el área (en centímetros cuadrados) de un cuadrado cuyo lado mide *x* cm. Según esto hallar:

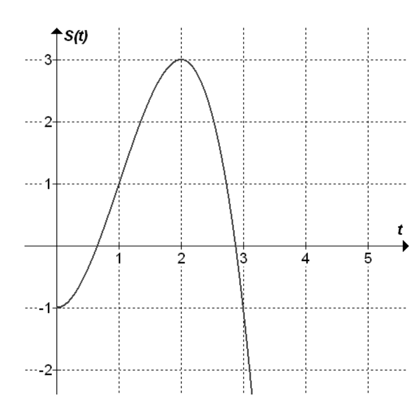
a) La razón promedio de variación de A(x) con respecto a x cuando x varía de 4 a 4,6.
b) La razón promedio de variación de A(x) con respecto a x cuando x varía de 4 a 4,3.
c) La razón promedio de variación de A(x) con respecto a x cuando x varía de 4 a 4,1.
d) La razón instantánea de variación de A(x) con respecto a x cuando x = 4

50. La temperatura de una persona es *f(t)* grados Fahrenheit, *t* días después de adquirir una enfermedad que dura 10 días, donde: $f(t)=-0{,}12t^2+1{,}2t+98{,}6\ ;\ 0\leq t\leq 10$

a) ¿Cuál es la temperatura de la persona luego de 3 días de estar enferma?
b) ¿Cuál es la temperatura de la persona luego de 8 días de estar enferma?
c) ¿Cuál es la variación de la temperatura de la persona entre el tercer y el octavo día?
d) ¿Cuál es la tasa promedio de variación de la temperatura de la persona con respecto al tiempo, entre el tercer y el octavo día?
e) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea de la temperatura con respecto al tiempo en el tercer día y en el octavo día.

51. Un volquete vierte arena, de manera que se forma un montículo cónico, cuya altura es siempre el doble del radio de la base. Si *V(h)* metros cúbicos es el volumen del montículo cuando la altura es *h* metros:
a) Hallar V(h)
b) Hallar la razón de variación del volumen con respecto a la altura cuando ésta es de 8 metros.

52. Un cuerpo se mueve en línea recta, de manera que, si S metros es la posición respecto al origen O, luego de t segundos entonces $S(t) = -t^3 + 3t^2 - 1$, con $t \geq 0$



a) Hallar su función de velocidad instantánea $V(t)$ y de aceleración instantánea $A(t)$
b) Hallar su posición inicial, velocidad inicial y aceleración inicial.
c) Hallar su posición, velocidad y aceleración para t = 1 segundo y para t = 3 segundos..
d) ¿En qué instantes el cuerpo está en reposo?
e) ¿En qué intervalos de tiempo el cuerpo se mueve hacia la izquierda?
f) ¿En qué intervalos de tiempo el cuerpo se mueve hacia la derecha?

53. Un cuerpo se mueve en línea recta, de manera que, si S metros es la posición respecto al origen O, luego de t segundos entonces $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, con $t \geq 0$

a) Hallar su función de velocidad instantánea $V(t)$ y de aceleración instantánea $A(t)$
b) Hallar su posición inicial, velocidad inicial y aceleración inicial.
c) Hallar su posición, velocidad y aceleración para t = 1 segundo y para t = 3 segundos..
d) ¿En qué instantes el cuerpo está en reposo?
e) ¿En qué intervalos de tiempo el cuerpo se mueve hacia la izquierda?
f) ¿En qué intervalos de tiempo el cuerpo se mueve hacia la derecha?
g) Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones $S(t), V(t)\ y\ A(t)$

54. El costo total de fabricación de x relojes es *C(x)* dólares, donde $C(x) = 1500 + 3x + x^2$

a) Hallar la función de costo marginal C ‘(x)
b) Hallar el costo total de producir 40 relojes y 41 relojes.
c) ¿Cuál es el costo de producir el reloj número 41?
d) Determinar el costo marginal para x = 40 y comparar el resultado obtenido con el resultado de (c).

55. Después de que el “gusano de la manzana” sale del capullo, se dirige a una manzana. El período comprendido entre la salida y el hallazgo de una manzana se denomina período de búsqueda. El período de búsqueda S(t) en días, y el porcentaje de larvas N(t) que sobreviven al periodo de búsqueda, dependen de la temperatura del aire t medida en grados Celsius.
Los entomólogos sugieren que para 20 ≤ t ≤ 30, se tiene:

$$N(t) = -0{,}85t^2 + 45{,}4t - 547 \quad \text{y} \quad S(t) = -0{,}03t^2 + 1{,}67t - 13{,}65$$

a) Trazar la gráfica de N(t) y hallar la temperatura t a la que sobrevive el mayor porcentaje de larvas.
b) Trazar la gráfica de S(t) y hallar la temperatura t a la que es máximo el período de búsqueda.
c) Cuando la temperatura del ambiente es de 25º Celsius, ¿cuál es el período de búsqueda?. ¿Qué porcentaje de larvas sobrevive?
d) Hallar $\frac{dS}{dt}$ y $\frac{dN}{dt}$ cuando t = 25. ¿Qué significan estos resultados?